Grado en Física

Análisis Matemático I – Evaluación 1 - Soluciones

Ejercicio 1. Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica la desigualdad:

$$\frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6. \tag{1}$$

Solución. Las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$ son $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ y $\beta = 1 + \sqrt{5}$. Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, en lo que sigue se supondrá que $x \neq \alpha$ y $x \neq \beta$. La desigualdad (1) puede escribirse en la forma:

$$\frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} - 6 = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 9}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 0 \tag{2}$$

Esta desigualdad es equivalente a:

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 9)(x^2 - 2x - 4) \geqslant 0. \tag{3}$$

Como el polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ tiene la raíz 3, obtenemos fácilmente:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

Como $x^2 - 3x + 3$ no tiene raíces reales, se verifica que $x^2 - 3x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, para estudiar la desigualdad (3) podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la desigualdad (1) es equivalente a:

$$h(x) = (x - 3)(x - \alpha)(x - \beta) \geqslant 0.$$

Como $\alpha < 3 < \beta$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha &\implies h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
\alpha < x < 3 &\implies h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
3 < x < \beta &\implies h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x &\implies h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(3) = 0$, concluimos que:

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6\right\} =]1 - \sqrt{5}, 3] \cup]1 + \sqrt{5}, +\infty[.$$

☺

Comentario. Principal fallo: no simplificar la desigualdad (1) expresándola como en (2). Segundo fallo, multiplicar ambos lados de la desigualdad (1) por el denominador y afirmar que dicha desigualdad equivale a $x^3 - 33 \geqslant 6(x^2 - 2x - 4)$. Esto será así solamente cuando $x^2 - 2x - 4 > 0$, lo que no siempre es cierto. Tercer fallo: errores en cálculos elementales.

No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas. Hay quienes distinguen los casos en que el denominador es positivo o negativo para transformar, en cada caso, la desigualdad (1) en otra equivalente. Es un buen método para equivocarse.

En este tipo de ejercicios hay que transformar la desigualdad dada en otras *equivalentes* a ella.

El signo de $h(x) = (x - \alpha)(x - 3)(x - \beta)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. Podemos, por ejemplo, evaluar $h(x)$ en un punto de cada intervalo. También podemos observar que $h(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de x positivos y muy grandes será $h(x) > 0$, lo que nos dice que para $x > \beta$ es $h(x) > 0$. Ahora, como las raíces de $h(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener el mismo resultado anterior.

Algunos calculan las raíces complejas de la ecuación $x^2 - 3x + 3 = 0$ y las *ordenan* junto con las raíces reales. Desconozco cómo se *ordenan* números complejos. Otros, operan de *forma extraña* con fracciones. Se supone que sabéis trabajar con fracciones.

Algunos usan números decimales. Lo repito: en esta asignatura no se permite usar números decimales.

Ejercicio 2. Prueba que la siguiente igualdad es válida para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arc\,tg}(x^2) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Solución. Nos piden probar que:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}(x^2)$$

Pongamos $z = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}(x^2)$. Por *definición* de arcotangente de un número, lo que hay que probar es que $\operatorname{tg}(z) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ ***y que*** $z \in]-\pi/2, \pi/2[$. Esto último es claro pues como $x^2 \geqslant 0$ se tiene que $0 \leqslant \operatorname{arc\,tg}(x^2) < \pi/2$, y deducimos que $-\pi/4 \leqslant z < \pi/4$. Por tanto se verifica que $z \in]-\pi/2, \pi/2[$[1]. Falta probar que $\operatorname{tg}(z) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$. Usando las fórmulas de adición para el seno y el coseno, tenemos:

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)\cos(\operatorname{arc\,tg}(x^2)) - \cos(\pi/4)\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg}(x^2))}{\cos(\pi/4)\cos(\operatorname{arc\,tg}(x^2)) - \operatorname{sen}(\pi/4)\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg}(x^2))}$$

Como $\operatorname{sen}(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, simplificamos y dividimos por $\cos(\operatorname{arc\,tg}(x^2))$ (observa que $\cos(\operatorname{arc\,tg}(x^2)) > 0$ ¿por qué?) y obtenemos:

$$\operatorname{tg}(z) = \frac{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}(x^2))}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}(x^2))} = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

☺

Comentario. Todo lo que hay que saber para hacer este ejercicio, muy parecido a uno hecho en clase, es la definición de la función arcotangente. Algunos probáis la igualdad $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}(x^2)) = \frac{1-x^2}{x^2+1}$. Eso no es suficiente. Fallos principales en este ejercicio son afirmar que $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(y)$ y, muchísimo peor, confundir la función arcotangente con la cotangente y afirmar que $\operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. ¿Recordáis que dije en clase que alguno de vosotros caería en este error? Pues eso ☹. Algunos empiezan el ejercicio hasta el punto en que hay que dividir por $\cos(\operatorname{arc\,tg}(x^2))$ cosa que no hacen y se quedan ahí. Quien hace eso es que no ha entendido el ejercicio que hicimos en clase.

Las "fórmulas de adición" para el seno y el coseno hay que saberlas de memoria. Se recuerdan fácilmente haciendo el producto

$$\cos(a+b) + i\operatorname{sen}(a+b) = \mathrm{e}^{i(a+b)} = \mathrm{e}^{ia}\,\mathrm{e}^{ib} = \big(\cos(a) + i\operatorname{sen}(a)\big)\big(\cos(b) + i\operatorname{sen}(b)\big)$$

e igualando partes real e imaginaria. ¿Tan difícil es eso?

[1] No te extrañe que resulte de hecho que $-\pi/4 \leqslant z < \pi/4$ pues se tiene que $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{x^2+1} < 1$ y la función arcotangente es estrictamente creciente por lo que $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\pi/4 \leqslant \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{1-x^2}{x^2+1}\right) < \operatorname{arc\,tg}(1) = \pi/4$, por tanto z está donde tiene que estar

Repito algo dicho en clase: ***ninguna de las funciones elementales es aditiva***. Es decir, si f indica una función elemental (logaritmo, exponencial, raíz cuadrada, potencia, seno, coseno, tangente, arcotangente...) ***no se verifica*** que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

Ejercicio 3.

a) Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ y exprésalas en la forma $a + ib$.

b) Expresa en la forma $a + ib$ el número $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{24}$.

Solución. a) Pongamos $w = z^2$ con lo que la ecuación se convierte en $w^2 + 4w + 16 = 0$ cuyas soluciones son:

$$w_1 = \frac{-4+\sqrt{-48}}{2},\ w_2 = \frac{-4-\sqrt{-48}}{2}$$

El número complejo -48 tiene argumento principal π y módulo 48 por lo que

$$\sqrt{-48} = \sqrt{48}(\cos(\pi/2) + i\ \mathrm{sen}(\pi/2)) = i\sqrt{48} = i4\sqrt{3}.$$

Obtenemos que $w_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $w_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$. Ahora debemos calcular z de modo que $z^2 = w_1$ o $z^2 = w_2$. Por tanto, las soluciones de la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ son $z_1 = \sqrt{w_1}$, $z_2 = -\sqrt{w_1}$, $z_3 = \sqrt{w_2}$ y $z_4 = -\sqrt{w_2}$. Donde, naturalmente, el símbolo $\sqrt{w}$ indica la raíz cuadrada principal de w. Observa que como la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ tiene coeficientes reales, sus raíces complejas debe ser conjugadas dos a dos. Por tanto, solamente necesitamos calcular la raíz $z_1 = \sqrt{w_1}$ y las demás raíces serán: $z_2 = -z_1$, $z_3 = \overline{z_1}$ y $z_4 = -z_3$. Tenemos que $|w_1| = 4$ y $\arg(w_1) = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) + \pi = 2\pi/3$. Por tanto

$$z_1 = \sqrt{-2+2\sqrt{3}i} = 2(\cos(\pi/3) + i\ \mathrm{sen}(\pi/3)) = 2 + i2\sqrt{3}.$$

b) Tenemos que $\left|\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right| = \dfrac{|-\sqrt{3}+i|}{|1-i|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Además:

$$\arg(-\sqrt{3}+i) = -\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{3}) + \pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6$$

Y $\arg(1-i) = \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\pi/4$. Luego el número $\varphi = 5\pi/6 - (-\pi/4) = 13\pi/12$ es *un* argumento de $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}$ (observa que *no* es el argumento principal, pero eso no importa). Tenemos que:

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i} = \sqrt{2}(\cos(\varphi) + i\ \mathrm{sen}(\varphi)) \quad \text{donde} \quad \varphi = \frac{13}{12}\pi$$

Usando la fórmula de De Moivre tenemos:

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{24} = (\sqrt{2})^{24}\big(\cos(24\varphi) + i\ \mathrm{sen}(24\varphi)\big) = 2^{12}\big(\cos(26\pi) + i\ \mathrm{sen}(26\pi)\big) = 2^{12} = 4096$$

☺

Comentario. Toda la dificultad es calcular módulos y argumentos de números complejos. Algunos no saben que $\sqrt{-48} = 4\sqrt{-3} = 4\sqrt{3}\,i$. Algunos no hacen este ejercicio porque no se dan cuenta de que $\sqrt{48} = 2\sqrt{3}$. Recuerda: siempre hay que simplificar todo lo que se pueda. Hay muchos fallos al calcular argumentos principales. Quien no sepa hacerlo no podrá hacer nada con números complejos. En el ejercicio se piden las soluciones de la ecuación en la forma $a + ib$, por eso no vale dejar indicadas las raíces cuadradas. Hay que calcularlas. ¡Hay quien dice que la ecuación $w^2 + 4w + 16 = 0$ no tiene solución porque el discriminante es negativo! ¡Para eso sirven los números complejos! Para resolver ecuaciones que no tienen soluciones reales. Cometéis demasiados errores en cálculos tan sencillos. Nadie os puede enseñar a calcular, es algo que tenéis que aprender practicando. Muy pocos hacéis bien este ejercicio ☹.

Los valores del seno y del coseno de $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/6$ deben saberse de memoria; y a partir de ellos se pueden deducir los de la tangente y el arcotangente así como calcular otros valores.